Sistema de Ecuaciones Lineales

Ingry Carina Coy Chacón

Matriz

- **Definición**:

Una matriz es un arreglo rectangular de números en filas y columnas, encerrados entre corchetes o paréntesis.

- **Orden de una Matriz:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3x4}$$

Siendo A una matriz de 3 filas (horizontales) y 4 columnas (verticales).

- **Matriz Cuadrada:**

Se llama así a la matriz que tiene el mismo número de filas y columnas. Así,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{3x3}}$$

- Es una matriz cuadrada de orden 3x3 o simplemente diremos que tiene orden 3.

Determinante

Determinante de orden uno

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Determinante de orden dos

Dada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se define como el determinante de A como:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

Determinante de orden tres

Dada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Determinante de orden dos:

El valor obtenido al realizar el producto de la diagonal primaria ,memos el producto de la diagonal secundaria.

Determinante de orden dos

Dada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se define como el determinante de A como:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

Método Determinantes

Procedimiento

1. Se ordenan las ecuaciones y se escribe el sistema en la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

$$a_1 = Coeficiente\ de\ x\ de\ la\ primera\ ecuación$$

$$b_1 = Coeficiente\ de\ y\ de\ la\ primera\ ecuación$$

$$c_1 = Constante\ de\ la\ primera\ ecuación$$

$$a_2 = Coeficiente\ de\ x\ de\ la\ segunda\ ecuación$$

$$b_2 = Coeficiente\ de\ y\ de\ la\ segunda\ ecuación$$

$$c_2 = Constante\ de\ la\ segunda\ ecuación$$

Procedimiento

2. El valor de x es una fracción cuyo denominador es la determinante del sistema y cuyo numerador es la determinante que se obtiene sustituyendo en la determinante del sistema la columna de los coeficientes de x por la columna de los términos independientes de las ecuaciones dadas; esto es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Introducción

5. El valor de y es una fracción cuyo denominador es la determinante del sistema y cuyo numerador es la determinante que se obtiene sustituyendo en la determinante del sistema la columna de los coeficientes de y por la columna de los términos independientes de las ecuaciones dadas; esto es:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 1:

$$Resolver\ el\ Sístema: \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x - y = 6 \end{cases}$$

Solución de $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x - y = 6 \end{cases}$

Solución: organizamos los determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(-1)(5) - (-2)(6)}{(3)(-1) - (5)(-2)} = \frac{-5 + 12}{-3 + 10} = \frac{7}{7} = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x - y = 6 \end{cases}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(6)-(5)(5)}{(3)(-1)-(5)(-1)} = \frac{18-25}{-3+10} = \frac{-7}{7} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Solución:

$x = 1$

$y = -1$

Ejemplo 2

$$\boldsymbol{Resolver\ el\ S\acute{\imath}stema}: \begin{cases} \mathbf{4}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\boldsymbol{y} = \mathbf{6} \\ -\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}\boldsymbol{y} = \mathbf{4} \end{cases}$$

Solución $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ -2x + 5y = 4 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(6)(5)-(4)(-3)}{(4)(5)-(-2)(-3)} = \frac{30+12}{20-6} = \frac{42}{14} = 3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Solución $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ -2x + 5y = 4 \end{cases}$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{(4)(4)-(-2)(6)}{(4)(5)-(-2)(-3)} = \frac{16+12}{20-6} = \frac{28}{14} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Solución:

$x = 3$

$y = 2$

Método de Igualación

Procedimiento

1. Se ordenan (alfabéticamente) y nombran las ecuaciones
2. Se despeja una de las incógnitas en ambas ecuaciones.
3. Se igualan entre sí las expresiones de la incógnita despejada en el paso anterior
4. Se resuelve la ecuación resultante (ecuación de una incógnita).
5. El valor numérico obtenido para la incógnita que estamos resolviendo, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales, obteniendo así el valor numérico de la otra incógnita.

Ejemplo

- 1. Ordenamos y nombramos las ecuaciones.

- $$\begin{cases} 2x + 3y = 18 & \color{red}{(1)} \\ 3x + 4y = 25 & \color{red}{(2)} \end{cases}$$

2. Despejamos una de las incógnitas en ambas ecuaciones.

- $x = \frac{18-3y}{2} \qquad (1) \qquad x = \frac{25-4y}{3} \qquad (2)$

- 3. Igualamos las incógnitas despajadas.

- $x = x$

3. Igualamos

$$x = x$$

$$x = \frac{18 - 3y}{2} \qquad (1) \qquad\qquad x = \frac{25 - 4y}{3} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{\frac{18 - 3y}{2} = \frac{25 - 4y}{3}}$$

4. Se resuelva la ecuación para despejar

$$\frac{18-3y}{2}=\frac{25-4y}{3}$$

$$3(18-3y)=2(25-4y)$$

$$54-9y=50-8y$$

$$-9y+8y=50-54$$

$$-y=-4$$

$$(-1)-y=-4\,(-1)$$

$$y=4$$

5. Sustituir el valor de la incógnita para hallar el valor de la otra.

$$\boldsymbol{x = \frac{18 - 3y}{2}} \qquad \color{red}{\mathbf{(1)}} \qquad \boldsymbol{x = \frac{25 - 4y}{3}} \qquad \color{red}{\mathbf{(2)}}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{18 - 3(4)}{2}} \qquad \color{red}{\mathbf{(1)}}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{18 - 12}{2}} \qquad \color{red}{\mathbf{(1)}}$$

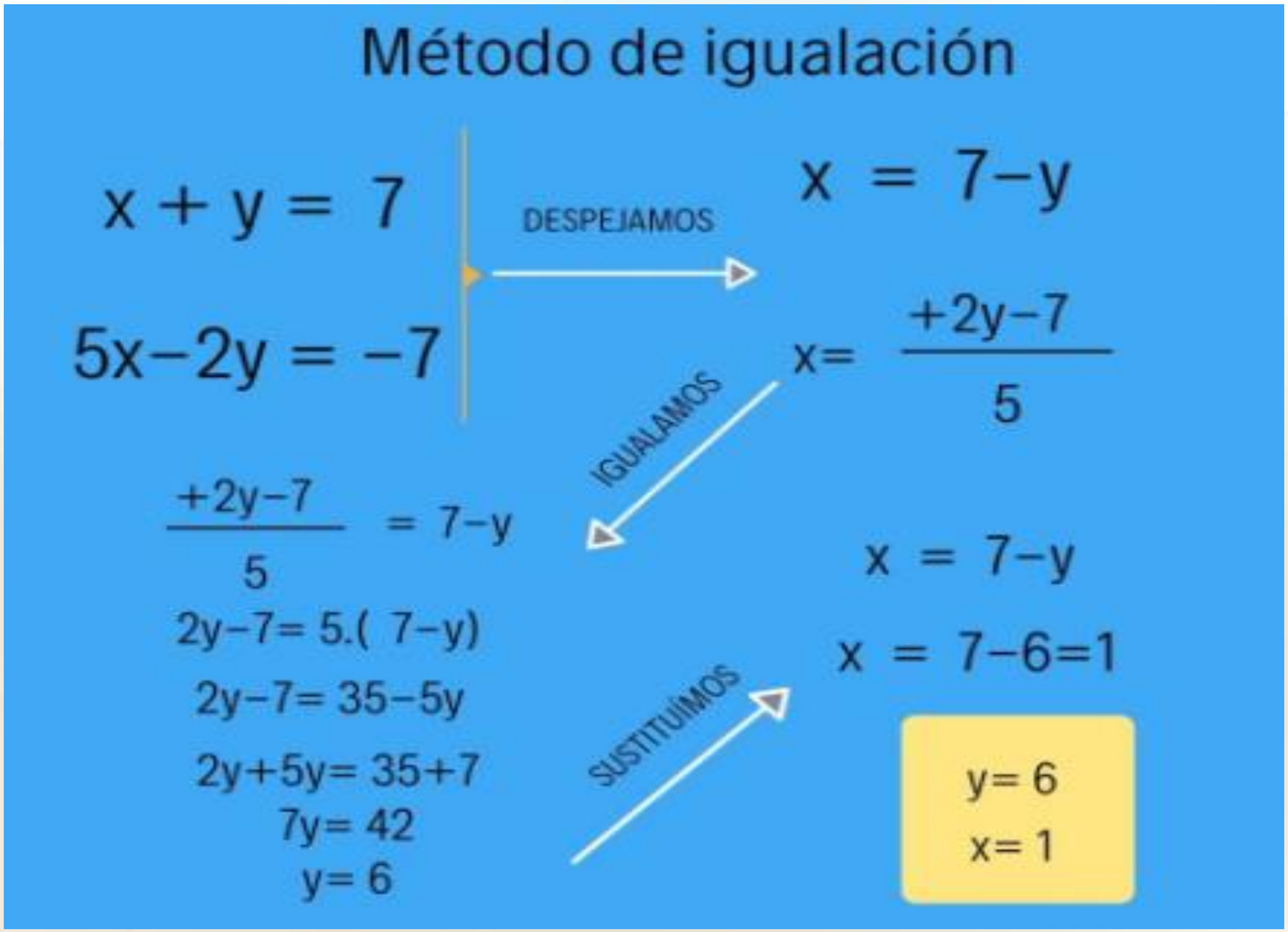
$$\boldsymbol{x = \frac{6}{2} = 3}$$

$$\color{red}{\mathbf{x = 3}}$$

Solución del Sístema

- $x = 3$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $y = 4$
- Verificación:
- $$\begin{cases} 2(3) + 3(4) = 18 & (1) \\ \qquad 18 = 18 & \\ 3(3) + 4(4) = 25 & (2) \\ \qquad 25 = 25 & \end{cases}$$

Ejemplo 2:


Método de igualación
x + y = 7
5x−2y = −7
DESPEJAMOS
x = 7−y
x= +2y−7 / 5
IGUALAMOS
+2y−7 / 5 = 7−y
2y−7= 5.(7−y)
2y−7= 35−5y
2y+5y= 35+7
7y= 42
y= 6
SUSTITUÍMOS
x = 7−y
x = 7−6=1
y= 6
x= 1